INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro projekt Perspektiva 2010

reg. č. CZ.1.07/1.3.05/11.0019

Kvadratické rovnice, kvadratické funkce.

Tomáš Kopec, 2010, počet stran 41

Obsah:

2.1. Kvadratické rovnice

Připomeňme si nejprve, co vlastně rozumíme pojmem rovnice - je to úloha najít takové x, pro které zadané výrazy $L(x)$ a $P(x)$ nabývají stejných hodnot. Tuto úlohu zpravidla zapisujeme ve tvaru $L(x)=P(x)$ a hledané číslo x nazýváme řešením nebo kořenem rovnice. Podle druhu výrazů $L(x)$ a $P(x)$ rozlišujeme v matematice různé typy rovnic. V předchozích kapitolách jsme se seznámili s rovnicí lineární, tedy s rovnicí tvaru $ax+b=0;\, a, b\in R$. Dalším typem rovnic, které se naučíme řešit, budou rovnice kvadratické. Přídavné jméno „kvadratický“ znamená v matematice umocněný na druhou. Kvadratickou rovnici tedy snadno poznáme tak, že bude obsahovat x^2, přičemž půjde o nejvyšší vystupující mocninu neznámé (například rovnici obsahující x^3 bychom již nazývali kubickou). Řešení kvadratických rovnic má svá specifika, se kterými se v této kapitole seznámíme.

Kvadratická rovnice

Kvadratickou rovnicí nazýváme rovnici tvaru $ax^2+bx+c=0;\, a, b, c\in R;\, a\neq 0$ nebo rovnici, již lze na tento tvar upravit. Členy na levé straně mají své názvy:

$$ax^2+bx+c=0$$

kvadratický člen **lineární člen** **absolutní člen**

Jako příklady kvadratických rovnic můžeme uvést následující rovnice:

$2x^2-x-5=0$, ve které je $a=2;\, b=-1;\, c=-5$ nebo

$4x^2-7=0$, ve které je $a=4;\, b=0;\, c=-7$ atd.

Př.1 U následujících kvadratických rovnic nejprve (pokud je to potřeba) anulujte pravou stranu a poté určete koeficienty *a*, *b*, *c*.

a) $3x^2-2x+1=0$ b) $x^2=8x$ c) $-x^2=4$

V případě, že je kvadratická rovnice ve složitějším tvaru, postupujeme při jejím řešení obdobně jako u lineárních rovnic. Pomocí ekvivalentních úprav převádíme rovnici do tvaru jednoduššího. U kvadratické rovnice ovšem nelze sečíst kvadratický a lineární člen, tedy ax^2 a bx . Proto je osamostatnění neznámé složitější a závěrečné kroky jsou oproti lineární rovnici odlišné. Ukážeme si nejprve řešení kvadratických rovnic v jednodušších tvarech.

Součinový tvar kvadratické rovnice

Jde o rovnici, jejíž levá strana je zapsána jako součin (násobení) dvou činitelů, například závorek. Jako ukázku si zvolíme kupříkladu rovnici

$$(x-3)(x+6)=0 \quad .$$

Nejprve se přesvědčíme, zda jde skutečně o kvadratickou rovnici. Pokud obě závorky roznásobíme, dostaneme

....

....   ,

což je skutečně kvadratická rovnice s koeficienty

$a=$ ....
$b=$ ....
$c=$ ....

Pro řešení je ovšem výhodnější dříve uvedený tvar se dvěma závorkami. Připomeňme si, že princip řešení rovnice spočívá v hledání čísla, které po dosazení za x dává rovnost levé a pravé strany.
Z tohoto pohledu je výhodná 0 na pravé straně rovnice. Chceme – li, aby při násobení dvou čísel vzniklo číslo 0, musí být alespoň jedno z těchto čísel rovno 0. Naším úkolem bude tedy vytvořit nulu v první nebo druhé závorce.

$(x-3)$ bude rovno 0 při dosazení čísla .... a
$(x+6)$ bude rovno 0 při dosazení čísla ....

Řešením rovnice $(x-3)(x+6)=0$ tedy budou čísla ....

Vidíme, že na rozdíl od lineární rovnice může mít kvadratická rovnice dvě řešení. Tato řešení zpravidla odlišujeme spodními indexy a píšeme například $x_1=\quad ; x_2=\quad$. Na pořadí přitom nezáleží.

Př.2 Řešte v R

a) $(x+4)(2x-5)=0$ b) $(x+2{,}3)^2=0$.

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Jde o kvadratickou rovnici s koeficientem $c=0$, tedy rovnici tvaru $ax^2+bx=0$. Tento typ kvadratické rovnice snadno převedeme na součinový tvar vytknutím *x*.

Př.3 Řešte v *R*

a) $3x^2-x=0$ b) $\frac{4}{9}x^2=\frac{5}{3}x$ c) $x+(3x-8)^2=(x+4)(3x+16)$

Kvadratická rovnice bez lineárního členu

Jde o kvadratickou rovnici s koeficientem $b=0$, tedy rovnici tvaru $a x^2+c=0$. Využíváme toho, že neznámá v nich vystupuje pouze jednou a x osamostatňujeme například na levé straně. Druhé mocniny se zbavujeme odmocněním obou stran rovnice. Pokud jsou na obou stranách rovnice kladná čísla, jde o ekvivalentní úpravu a pokud určíme podmínky, nemusíme dělat zkoušku. Při odmocnění obou stran ale nesmíme zapomenout na druhé (záporné) řešení. Máme – li totiž například rovnici $x^2=9$, není jejím řešením jen číslo 3, ale také číslo -3. Jinými slovy zohledníme obecný vztah $\sqrt{x^2}=|x|$. Tento postup si můžeme vyzkoušet na následujícím příkladu.

Př.3 Řešte v R

a) $4x^2-49=0$ b) $x^2-75=0$ c) $x^2+25=0$ d) $\frac{x^2}{15}-\frac{5}{2}=20-\frac{x^2}{30}$

Schopnost řešit kvadratické rovnice ve výše uvedených tvarech rozhodně patří k dovednostem, které je nutné zvládnout. V rámci učiva o kvadratických rovnicích ale nejde o záležitost nejdůležitější. Tou je bezesporu řešení úplné kvadratické rovnice.

Úplná kvadratická rovnice

Jde o rovnici $ax^2+bx+c=0$, v níž ani jeden z koeficientů *a*, *b*, *c* není roven 0. Abychom lépe pochopili princip řešení takové rovnice, vyzkoušíme si nejprve příklad, jehož zadání bude pro řešení výhodné. Závorku v zadání přitom nebudeme odstraňovat, ale pokusíme se řešit podobným způsobem jako jsme to dělali v předchozí kapitole, tzn. u rovnic bez lineárního členu.

Př.4 Řešte v R $(x-5)^2-36=0$.

Podobně se pokusíme vyřešit také následující kvadratickou rovnici. Ta již bude zadána v obvyklejším tvaru a bude na nás, abychom se závorku, která nám pomohla v předchozí úloze, pokusili vytvořit sami.

Př.5 Řešte v R $x^2+6x+8=0$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Koeficienty, které vystupovaly v zadání předešlé úlohy, byly zvoleny tak, aby její řešení nebylo obtížné. Jak bude postup vypadat v případě, kdyz koeficienty tak příznivé nebudou, si vyzkoušíme na dalším příkladu.

Př.6 Řešte v R $2x^2-9x-5=0$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Vidíme, že postup byl sice stejný, ale obtížnost již byla mnohem vyšší. Koeficienty přitom již byly natolik obecné, že by stálo za úvahu vyřešit kvadratickou rovnici v obecném tvaru, tzn. s koeficienty a, b, c. Tím bychom získali vzorec, do kterého bychom pak pouze dosazovali koeficienty ze zadání a vyhnuli se tak zdlouhavým postupům.

Př.7 Vyřešte kvadratickou rovnici v obecném tvaru $ax^2+bx+c=0$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Výraz vystupující ve vzorci pod odmocninou nazýváme diskriminant a značíme jej

$$D = b^2 - 4ac \ .$$

Diskriminant rozhoduje o počtu řešení kvadratické rovnice. Vyjde – li

a) $D > 0$, bude mít daná rovnice dvě různá řešení,
b) $D = 0$, bude mít daná rovnice jedno (dvojnásobné) řešení,
c) $D < 0$, nebude mít daná rovnice řešení.

V případě, že diskriminant není záporný, můžeme řešení kvadratické rovnice $a x^2+b x+c=0$ dopočítat podle vzorce

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ ;\ D=b^2-4ac\ .$$

Řešení přitom začínáme výpočtem diskriminantu. Jako ukázku se pokusíme vyřešit ještě jednou př.6, tentokrát podle vzorce, a srovnáme obtížnost obou postupů.

Př.8 Řešte v R podle vzorce $2x^2-9x-5=0$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Řešení kvadratických rovnic není obtížné, ale je potřeba si postup procvičit na větším množství úloh, abychom se seznámili se všemi případnými problémy, které mohou během řešení vzniknout.

Př.9 Řešte v R

a) $x^2-8x+15=0$ b) $x^2+0{,}9x-0{,}36=0$ c) $x^2+x+1=0$

d) $3x^2+5x+1=0$ e) $\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$ f) $x^2-6x+2=0$

Stejně jako u rovnic lineárních, i u rovnic kvadratických může být zadání složitější. V takovém případě se rovnici snažíme převést do základního tvaru $a x^2 + b x + c = 0$. K tomu opět použijeme úpravy rovnice, se kterými jsme se seznámili již u rovnic lineárních. Připomeňme si základní ekvivalentní úpravy.

EU1: Vzájemně vyměníme strany rovnice.
EU2: Výraz na jedné straně nahradíme výrazem, který je mu roven (za určených podmínek).
EU3: Přičteme k oběma stranám rovnice stejný výraz.
EU4: Vynásobíme obě strany rovnice výrazem různým od nuly.

Určíme – li na začátku řešení podmínky a provádíme - li pouze výše uvedené úpravy rovnice, nemusíme na konci provádět zkoušku jako nutnou součást řešení. Pokud ale máme dostatek času, je vhodné zkoušku provést, protože nám může pomoci odhalit případnou chybu.

Také při samotném řešení úplné kvadratické rovnice ve složitějším tvaru se budeme řídit podobným algoritmem, jaký jsme používali u lineárních rovnic:

1. Určíme podmínky.
2. Odstraníme desetinná čísla, zlomky a závorky.
3. Anulujeme jednu stranu rovnice.
4. Určíme diskriminant a v případě, že řešení existují, řešíme podle vzorce.
5. Zapíšeme obor pravdivosti.

Př.10 Řešte v R $\frac{x+5}{x+4}=\frac{x-4}{2x-3}$

Př.11 Řešte v R $\frac{2x-1}{2}+\frac{2}{2x-1}=2$

Př.12 Řešte v R $\frac{1}{2x-6}-\frac{2x}{3x-9}-\frac{5x}{12}=0$

Př.13 Řešte v R $\frac{1+x}{1-x}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x-1}{1+x}$

Př.14 Řešte v R $\frac{x+3}{x^2+x}+\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-3}{1-x^2}=0$

Iracionální rovnice

Jde o rovnice, ve kterých vystupuje neznámá pod odmocninou. Odmocninu odstraňujeme umocněním obou stran rovnice na druhou. Obecně tato úprava není ekvivalentní. Zachovává sice všechna řešení z předchozího řádku, ale může přidat i řešení „falešná“. I kdybychom určili podmínky, nemůžeme si být jisti, že všechna nalezená řešení jsou správná.

Například rovnice

$$\sqrt{x}=-4$$

řešení zjevně nemá, protože odmocnina nemůže vyjít záporná, ale pokud bychom to přehlédli a mechanicky obě strany umocnili na druhou, dostaneme

$$x=16 \quad .$$

Proto při řešení iracionálních rovnic zpravidla postupujeme tak, že neurčujeme podmínky, ale na konci provádíme zkoušku jako nutnou součást řešení, aby nám vyloučila případná nesprávná řešení.

Př.15 Řešte v R $\sqrt{5-x}-x=1$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Př.16 Řešte v R $\sqrt{x+2\sqrt{11x+4}}=5$.

Př.17 Řešte v R $\sqrt{5x}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}$.

Př.18 Řešte v R $\sqrt{x+27}-\sqrt{x-5}=2$.

Soustavy s kvadratickými rovnicemi

Na konci prvního ročníku jsme se věnovali řešení soustav lineárních rovnic. Dovednosti, které jsme přitom získali můžeme využít u řešení soustav s kvadratickými rovnicemi. Připomeňme si, že k řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých používáme některou z následujících metod:

1. **Metoda dosazovací**
2. **Metoda srovnávací (komparační)**
3. **Metoda sčítací**
4. **Metoda grafická**

Nejuniverzálnější z nich je metoda dosazovací, kterou je možné řešit každou soustavu, se kterou se v rámci středoškolského učiva setkáte. Tuto metodu také použijeme na řešení následujícího příkladu.

Př.19 Řešte v R^2 :

$$x^2+y^2=10$$
$$x-2y=1$$

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Př.20 Řešte v R^2 : $x - y = \frac{5}{6}$

$$x y = 1$$

Př.21 Řešte v R^2 :

$$x + y = 4$$
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 3$$

2.2. Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

V této kapitole navážeme na dovednosti získané v kapitole o kvadratických rovnicích. Díky těmto dovednostem pak budeme například schopni upravovat nové druhy algebraických výrazů, řešit kvadratické nerovnice apod.

Sestavení kvadratické rovnice

V tomto odstavci budeme řešit přesně opačný typ úlohy, než jsme byli zvyklí u kvadratických rovnic. Zatímco dříve jsme se naučili najít kořeny zadané kvadratické rovnice, nyní budeme kořeny znát a budeme hledat příslušnou rovnici. Nejsnazší bude hledat rovnici v součinovém tvaru. Máme – li například rovnici $(x-2)(x-5)=0$, není pro nás obtížné říci, že její kořeny jsou

$$x_1=\ldots\ldots ;\, x_2=\ldots\ldots \quad .$$

Jistě nebude problémem vyřešit ani úlohu obrácenou. Budeme – li například chtít sestavit kvadratickou rovnici s kořeny $x_1=1;\, x_2=-7$, budeme ji hledat v součinovém tvaru tak, aby po dosazení čísel 1 resp. -7 vycházela 0. Výsledkem pak bude rovnice

$$(x\qquad)(x\qquad)=0 \quad .$$

Pokud bychom chtěli uvést výslednou rovnici do obvyklejšího tvaru $ax^2+bx+c=0$, stačí obě závorky roznásobit:

....

....

Př.1 Sestavte kvadratickou rovnici s kořeny a) $x_1=7, x_2=-\frac{1}{3}$, b) $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$ a přesvědčete se o správnosti řešení.

Rozklad kvadratického trojčlenu

Tematicky spadá toto učivo spíše do kapitoly o mnohočlenech. Jednou z nejdůležitějších dovedností, které je potřeba při práci s mnohočleny zvládnout, jsou jejich rozklady na součin. Připomeňme si tedy základní způsoby rozkladů mnohočlenů na součin.

1. Vytýkání a postupné vytýkání
2. Rozklad podle vzorce
3. Rozklad kvadratického trojčlenu
4. Kombinace předchozích způsobů

Kvadratický trojčlen jsme přitom doposud rozkládali zpaměti a úspěch nebyl vždy zaručen. Poté, co jsme se naučili řešit kvadratické rovnice, můžeme rozklad kvadratického trojčlenu (ax^2+bx+c) provádět bezpečnějším způsobem. Z předchozího odstavce umíme sestavit kvadratickou rovnici v součinovém tvaru, jestliže známe její kořeny.

Představme si tedy například, že máme kvadratickou rovnici

$$x^2+2x-24=0 \quad .$$

Určíme její kořeny pomocí diskriminantu a vzorce:

Nyní sestavíme rovnici s kořeny $x_1 = \ldots\ldots ; x_2 = \ldots\ldots$, ale tentokrát v součinovém tvaru:

$$(x \qquad)(x \qquad) = 0$$

Porovnáme – li nyní levé strany původní a námi sestavené rovnice, dostaneme

$$x^2 + 2x - 24 = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

o čemž se snadno přesvědčíme roznásobením. Tím se nám otevírá nová možnost, jak bezpečně rozložit kvadratický trojčlen. Je však potřeba upozornit na to, že takto snadná je situace především v případě, že koeficient *a* rozkládaného trojčlenu $a x^2 + b x + c$ je roven 1. Přesněji můžeme říct, že:

Pokud máme kvadratickou rovnici $a x^2 + b x + c = 0$ s kořeny $x_1 ; x_2$, pak platí:

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Rozklad kvadratického trojčlenu si procvičíme na následujících příkladech.

Př.2 Rozložte na součin a) $x^2 - 8x - 33$ b) $3x^2 - x - 2$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Př.3 Nalezněte nejmenší společný násobek a největší společný dělitel mnohočlenů $P_1(x)=x^2-9x+14\,;P_2(x)=2x^2-13x-7$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Př.4 Zjednodušte $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x}$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Př.5 Uveďte na společného jmenovatele $\frac{1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{4x^2-1}$.

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde.

Kvadratická nerovnice

Při řešení kvadratických nerovnic budeme využívat metodu nulových bodů, kterou známe z řešení lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli. Pokud jste celý postup zapomněli, můžete si jej připomenout zde. U dané nerovnice anulujeme pravou stranu a na levé straně rozložíme na součin (tak, jak jsme se to naučili v předchozím odstavci). To nám umožní určit nulové body.

Př.6 Řešte v R a) $4x^2+19x-5>0$ b) $x^2-7x\leq 0$ c) $5x^2-4x+1\geq 0$

Řešení předchozího příkladu si můžete prohlédnout zde: a) b) c).

Př.7 Řešte v R $\frac{x^2-3x+2}{3x-9} \le 0$

Př.8 Řešte v R $\frac{5-x}{x-2} - \frac{2x-17}{x-5} > -3$

Př.9 Řešte v R $\frac{x^2+9}{x-4} \le 0$

Viétovy vzorce

Viétovy vzorce jsou vztahy, které vyjadřují souvislost mezi kořeny kvadratické rovnice a mezi koeficienty ze zadání. Vztahují se ke kvadratické rovnici v tzv. normovaném tvaru. Jde o tvar, v němž je koeficient *a* roven 1. Do normovaného tvaru snadno převedeme každou kvadratickou rovnici $a x^2 + b x + c = 0$ podělením obou stran číslem *a*. Dohodou pak další koeficienty značíme *p* a *q*, tedy:

$$x^2 + p x + q = 0 \; .$$

Abychom lépe pochopili vznik Viétových vzorců, představme si následující situaci: Máme sestavit kvadratickou rovnici s kořeny $x_1 = 3 ; x_2 = 4$. Najdeme ji nejprve v součinovém tvaru, tedy

$$(x-3)(x-4) = 0$$

a roznásobením ji uvedeme do tvaru základního (v našem případě normovaného). Budeme přitom sledovat, jak z čísel 3 a 4 vznikají koeficienty výsledné rovnice.

$$x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Vidíme, že

koeficient *p* (-7) vzniká jako .... kořenů (s opačným znaménkem) a
koeficient *q* (12) vzniká jako .... kořenů.

Výše uvedený postup přitom můžeme provést vždy. Uvedenou závislost nazýváme Viétovy vzorce:

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice v normovaném tvaru $x^2+px+q=0$ platí:

$$x_1+x_2=-p$$
$$x_1 \cdot x_2=q$$

Ve většině úloh není pořeba Viétovy vzorce použít a většinu lze najít i jinou cestu k řešení. V řadě případů nám však jejich použití značně zjednoduší práci. Bude se jednat zejména o úkoly, v jejichž zadání neznáme koeficienty kvadratické rovnice nebo ve kterých se otázka vztahuje k součtu resp. součinu kořenů. Ukážeme si několik takových příkladů. Prvním úkolem bude sestavit kvadratickou rovnici s danými kořeny. S takovým problémem jsme se setkali již v úvodu kapitoly a řešili jej pomocí součinového tvaru. Tentokrát zkusíme k řešení využít nové poznatky a srovnat, která z cest je pro nás příjemnější.

Př.10 Sestavte kvadratickou rovnici s kořeny $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{4}$ a přesvědčete se o správnosti řešení.

Př.11 Kvadratická rovnice $3x^2+kx-6=0$ má jedno řešení -3. Určete druhé řešení a koeficient *k*.

Př.12 Kvadratická rovnice $x^2-10x+m=0$ má jedno řešení čtyřikrát větší než druhé. Určete obě řešení a koeficient *m*.

Př.13 Kvadratickou rovnici $x^2 - 7x + 12 = 0$ vyřešte pomocí Viétových vzorců.

Př.14 Určete druhou mocninu součtu kořenů kvadratické rovnice $x^2 - 3x - 5 = 0$.

Př.15 V kvadratické rovnici $2x^2 - 5x - 9 = 0$ s neznámými kořeny x_1, x_2 určete $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

2.3. Kvadratické funkce

Význam funkcí pro praxi spočívá ve vyjádření závislosti mezi dvěma veličinami. Tzn., že funkce ukazuje, jak jedna veličina ovlivňuje druhou. Matematické funkce se mohou lišit druhem závislosti mezi veličinami. Prvním druhem funkce, se kterým jsme se seznámili, byla funkce lineární ($f: y = ax + b;\, a, b \in R,\, a \neq 0$). Jak již jsme řekli dříve, slovo kvadratický znamená v matematice umocněný na druhou. V praxi bychom pak mohli mezi kvadratické funkce zařadit vztahy $S = a^2$ pro výpočet obsahu .... nebo

$s = \frac{1}{2} g t^2$ pro určení dráhy .... apod.

Kvadratická funkce

Def: Kvadratickou funkcí budeme nazývat každou funkci tvaru
$$f: y = a x^2 + b x + c;\, a, b, c \in R,\, a \neq 0 \quad .$$

Mezi kvadratické funkce bychom tedy mohli zařadit například funkce
$f_1: y = 2x^2 - 3x + 1;\, f_2: y = -x^2 + x - 6;\, f_3: y = -3x^2 + 7;\, f_4: y = -5x^2 - 4x;\, f_5: y = 0{,}5x^2$ atd.
Úkoly, které budeme v souvislosti s kvadratickou funkcí plnit, budou obdobné jako u funkce lineární. Naučíme se sestrojit graf kvadratické funkce, vypočítat její hodnotu v daném bodě, určit souřadnice průsečíků grafu s osou *x* a *y*, určit obor hodnot funkce apod. Některé z těchto úkolů si vyzkoušíme hned na následujícím příkladu.

Př.1 Je dána kvadratická funkce $g: y = 2x^2 - x - 3$.

a) Určete $g(-3);\, g\left(-\frac{2}{3}\right);\, g(\sqrt{5} + 1)$.

b) Rozhodněte, ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty 3.

c) Určete souřadnice průsečíků grafu funkce g se souřadnicovými osami.

d) Rozhodněte, zda bod $A[-2; 3]$ leží na jejím grafu.

Graf kvadratické funkce

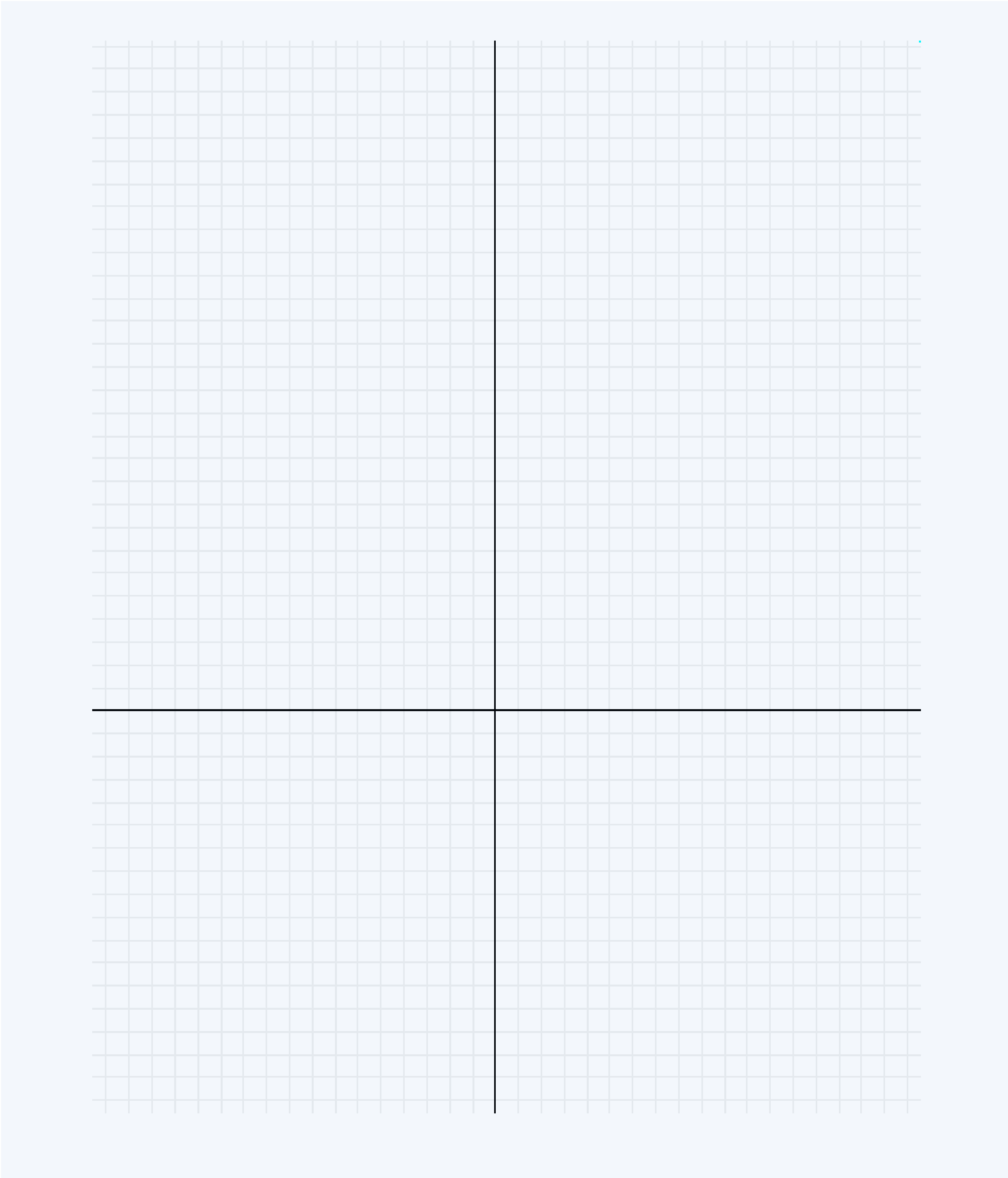
Z prvního ročníku si pamatujeme, že grafem lineární funkce je .... Pro její sestrojení nám postačila tabulka se dvěma body. Křivku, která je grafem kvadratické funkce, zatím neznáme, což ale neznamená, že pro nás bude nesestrojitelná. Pouze bude nutné vytvořit zpočátku tabulku s větším počtem bodů, které nás tvarově povedou. Jako ukázku vybereme několik jednoduchých kvadratických funkcí, na kterých si zároveň ukážeme, jak změna zadání ovlivňuje graf.

Př.2 Do jedné soustavy souřadnic sestrojte grafy funkcí
$f_0: y=x^2$; $f_1: y=x^2+3$; $f_2: y=(x-2)^2$; $f_3: y=-x^2$

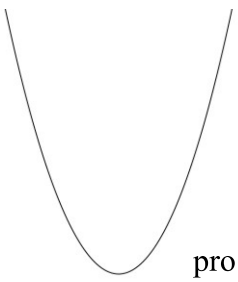
Pozn.: Funkce $f_2: y=(x-2)^2$ je skutečně kvadratická funkce, pouze je zapsána v méně obvyklém tvaru. Umocněním závorky bychom ji snadno upravili na $f_2: y=x^2-4x+4$, ale pro naše účely bude lepší, když závorku ponecháme.

Tabulka:

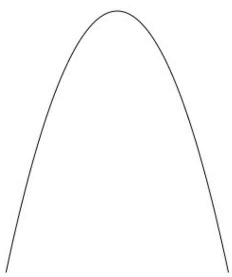
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_0: y=x^2$													
$f_1: y=x^2+3$													
$f_2: y=(x-2)^2$													
$f_3: y=-x^2$													



Grafem kvadratické funkce je křivka zvaná parabola. Vidíme, že tvarově jsou všechna čtyři křivky stejné, jen jejich umístění v soustavě souřadnic je jiné. Parabola může být v soustavě souřadnic ve dvou základních polohách:



pro $a > 0$



pro $a < 0$

Pokud bychom dále graf funkce $f_0: y=x^2$ považovali za základní, dalo by se říct, že ostatní grafy jsou odvozeny od něj. Přesněji řečeno:

Graf funkce $f_1: y=x^2+3$ je oproti grafu funkce $f_0: y=x^2$ posunut o ....

Graf funkce $f_2: y=(x-2)^2$ je oproti grafu funkce $f_0: y=x^2$ posunut o ....

Graf funkce $f_3: y=-x^2$ je s grafem funkce $f_0: y=x^2$ .... podle ....

Výše naznačené obměny výchozího grafu nazýváme transformacemi grafu. Pomocí transformací můžeme sestrojovat grafy různých složitějších (a to nejen kvadratických) funkcí za předpoladu, že známe graf základní. Řídíme se při tom následujícími obecnými pravidly:

Máme – li funkci $f(x)$ definovanou na množině D, a libovolná reálná čísla a, b, pak graf funkce

a) $f(x + a)$ je oproti grafu funkce $f(x)$ posunut o a jednotek ve směru osy x a to
- doleva pro $a>0$ a
- doprava pro $a<0$,

b) $f(x) + b$ je oproti grafu funkce $f(x)$ posunut o b jednotek ve směru osy y a to
- nahoru pro $b>0$ a
- dolů pro $b<0$,

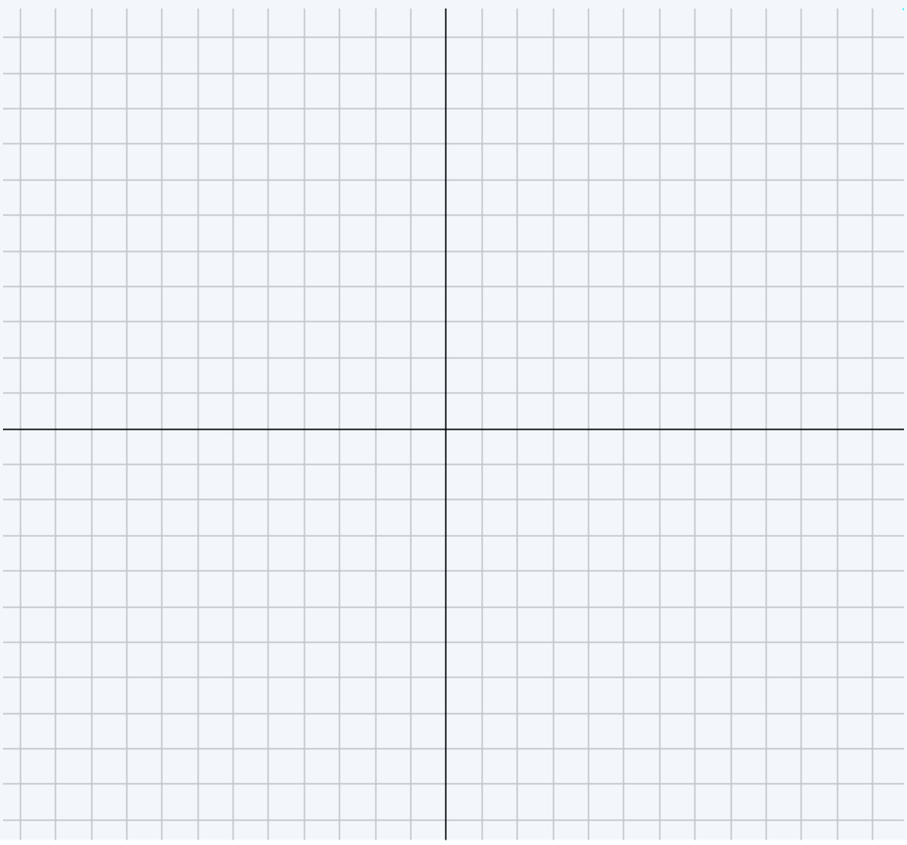
c) $-f(x)$ je s grafem funkce $f(x)$ osově souměrný podle osy x,

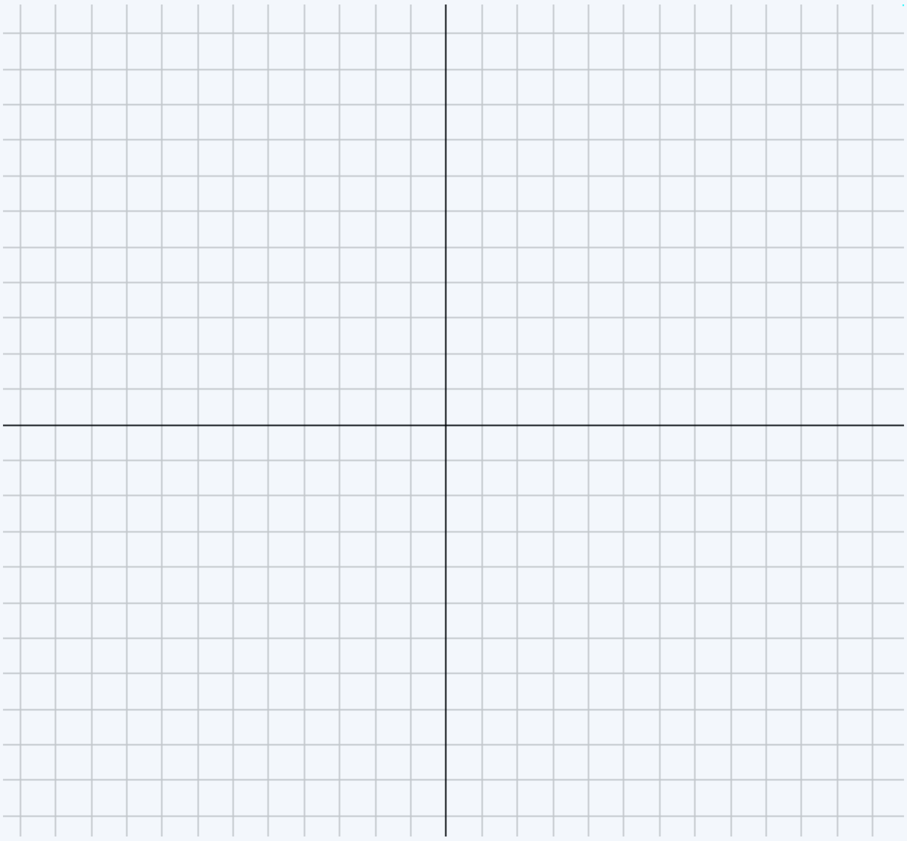
d) $f(-x)$ je s grafem funkce $f(x)$ osově souměrný podle osy y,

e) $|f(x)|$ získáme z grafu funkce $f(x)$ tak, že části pod osou x otočíme osově souměrně nad osu x.

Př.3 Pomocí věty o transformacích sestrojte grafy funkcí

a) $f_1: y=(x+3)^2+1$ b) $f_2: y=x^2-4x+3$





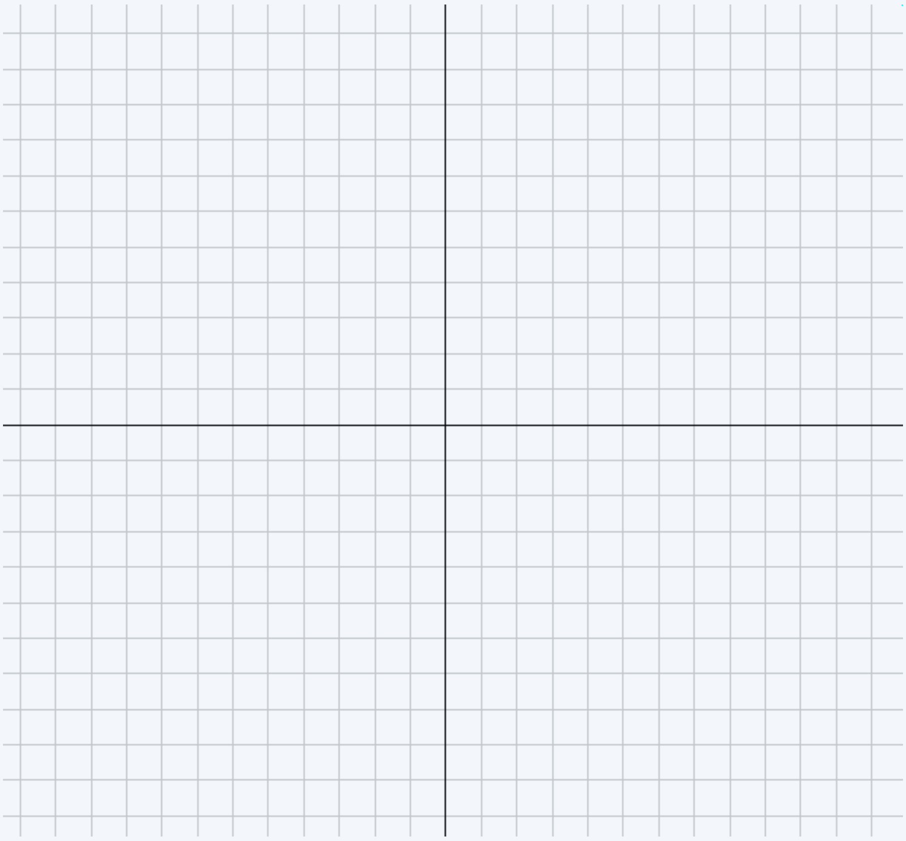
Abychom mohli správně přemístit základní graf u druhé funkce $f_2: y=x^2-4x+3$, museli jsme ji nejprve upravit do vhodnějšího tvaru. Obtížnost těchto úprav se obecně odvíjí od koeficientů v zadání funkce. Zejména u funkcí s koeficientem $a\neq 1$, by nám postup mohl činit problémy. V takovém případě je možné k sestrojení grafu použít tabulku. Vzhledem k tomu, že tvar paraboly již známe z předchozích úloh, nemusí tabulka obsahovat větší množství bodů. Bylo by ale vhodné, aby její součástí byl vrchol, který je na parabole nejvýznamnějším bodem a určuje její umístění. Pro určení souřadnic vrcholu paraboly můžeme použít následující větu:

Pro výpočet x - ové souřadnice vrcholu grafu kvadratické funkce $f: y=ax^2+bx+c$ platí:

$$x_V=-\frac{b}{2a}$$

Pozn.: y - ovou souřadnici získáme dosazením x_V do zadání funkce.

Př.4 Pomocí tabulky obsahující souřadnice vrcholu sestrojte graf funkce $g: y=-0{,}5x^2-3x$.



Př.5 U následujících kvadratických funkcí určete jejich obor hodnot, aniž byste sestrojovali graf.

a) $f_1: y = x^2 - 17x + 60$ b) $f_1: y = -x^2 + 4x + 21$

Př.6 Je dána kvadratická funkce $f: y = 2x^2 - 5x - 3$.

a) Určete souřadnice průsečíků jejího grafu se souřadnicovými osami.

b) Navrhněte vhodný způsob sestrojení jejího grafu a graf sestrojte.

c) Určete souřadnice průsečíků grafu funkce *f* s grafem funkce $g: y = 5x - 11$ a graf funkce *g* sestrojte do stejné soustavy souřadnic.