# 1.1. Funkce

## Funkce

V praxi se často setkáváme s tím, že změna jedné veličiny způsobuje změnu veličiny druhé. Z vlastní zkušenosti například víme, že doba, po kterou bude těleso padat volným pádem, závisí na výšce, do které těleso zvedneme. Měníme - li tedy výšku tělesa, mění se v závislosti na ní doba volného pádu. Matematickou terminologií říkáme, že čas je funkcí výšky. Pro čas resp. výšku používáme zavedené značky *t* resp. *h*.

Provedeme - li několik pokusů s pády tělesa z různých výšek, u kterých vyloučíme odpor vzduchu, můžeme zjištěné údaje uspořádat do tabulky:

| *h* (m) | 5 | 10 | 20 | 100 | 1000 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *t* (s) | 1 | 1,41 | 2 | 4,47 | 14,14 | | |

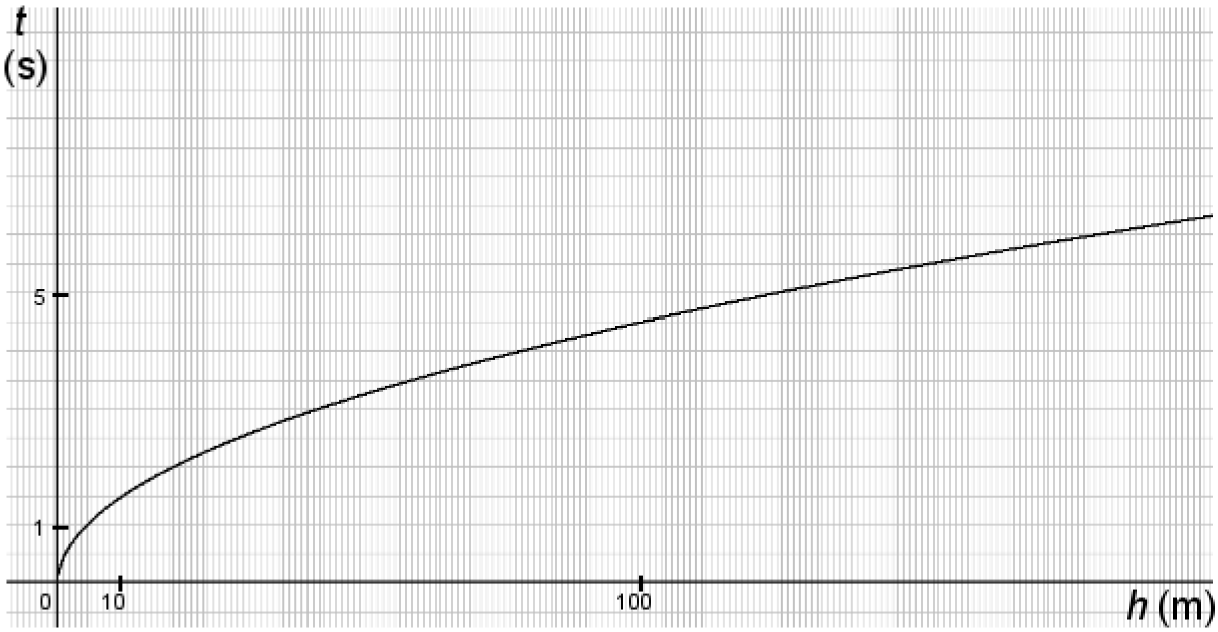
Tabulka je přehledná a jsme schopni v ní rychle vyhledat doby volného pádu pro různé výšky. Problém ale nastane, pokud bude chtít zjistit dobu pro jinou výšku, než je uvedeno v tabulce. Bude - li nás například zajímat, jak dlouho padá těleso z výšky 500 m, můžeme pouze konstatovat, že jde o čas mezi 5 a 14 sekundami.

Z tohoto důvodu je praktičtější zapsat závislost mezi časem a výškou pomocí rovnice, ve které budou vystupovat proměnné *t* a *h*. V našem případě platí:

$$t = \sqrt{\frac{h}{5}} \quad .$$

Z tohoto vztahu můžeme vypočítat dobu volného pádu pro libovolnou výšku dosazením za *h*.

U některých vztahů může být dosazení pracnější než v našem případě a uživatel by spíše ocenil rychlou orientaci a přehlednost třeba i na úkor přesnosti. V takovém případě lze danou závislost znázornit graficky. Graf sestrojujeme do soustavy souřadnic se dvěma osami, které odpovídají vystupujícím veličinám. Prostřednictvím grafu můžeme přecházet z jedné osy na druhou a rychle odhadovat příslušné hodnoty. Na spodním obrázku naleznete graf závislosti času na výšce volného pádu.



Př.1 Graficky odhadněte dobu volného pádu tělesa z výšky 150 m. Výsledek ověřte početně a zapište do tabulky.

Pozn. Je zřejmé, že za výšku nemůžeme dosazovat libovolná čísla. Nelze dosadit záporné výšky a rovněž shora je dosazení omezeno dosahem gravitační síly Země. Dosazování je omezeno tzv. definičním oborem funkce, který je součástí zadání a určuje, která čísla lze dosazovat.

## Definice funkce

Z předchozího příkladu jsme pochopili, že funkce slouží k vyjádření závislosti mezi dvěma veličinami. Toto chápání je jistě správné, ale jako matematická definice nepřesné a tedy nedostačující. V této kapitole si proto uvedeme, jak funkci definujeme z matematického hlediska.

Def.: Mějme neprázdnou množinu $A$, podmnožinu $R$. Přiřadíme - li **každému** číslu $x$ z množiny $A$ **právě jedno** reálné číslo $y$, dostaneme množinu $f$ uspořádaných dvojic čísel $[x\,;y]$, kterou nazýváme reálná funkce reálné proměnné $x$ (krátce funkce).

Množinu $A$ nazýváme definiční obor funkce a značíme ji také $D(f)$. Její prvky $x$ nazýváme nezávisle proměnné.

Čísla $y$ přiřazená $x$ nazýváme závisle proměnné (závisí na volbě $x$) nebo častěji funkční hodnoty. Množina všech funkčních hodnot se nazývá obor hodnot a značíme ji $H(f)$.

Pro vyjádření funkce zpravidla používáme zápis ve formě $f: y = f(x)\,;\,D(f)$.

Def.: Mějme funkci $f$ definovanou na množině $D(f)$. Pak grafem funkce budeme rozumět množinu všech bodů o souřadnicích $[x\,;f(x)]\,;\ \ x \in D(f)$ v pravoúhlé soustavě souřadnic.

Již z úvodního příkladu s volným pádem vyplynulo, že v praxi je možné trojí zadání funkce. Každý z těchto tří způsobů má své výhody a nevýhody. Uveďme si tedy způsoby zadání funkce v matematice:

K zadání funkce funkce potřebujeme

a) definiční obor (abychom věděli, kterým číslům budeme přiřazovat) a

b) funkční předpis - tedy pravidlo, podle kterého budeme přiřazení provádět.

Podle formy funkčního předpisu rozlišujeme tři základní druhy zadání:

I. **Výčet**: spočívá v tom, že všechna přiřazení vypíšeme. Jeho výhodou je rychlé a přesné nalezení hodnot funkce pro různé proměnné. Je ale možný pouze tehdy, je li definiční obor konečná množina, což je u důležitých funkcí málo obvyklé. Výčet může mít různé formy. Několik z nich si uvedeme na konkrétní funkci $f_1$.

$f_1$: $-1 \to -3$
$0 \to 4$
$2 \to -2$
$4 \to -3$
$5 \to -1$

nebo

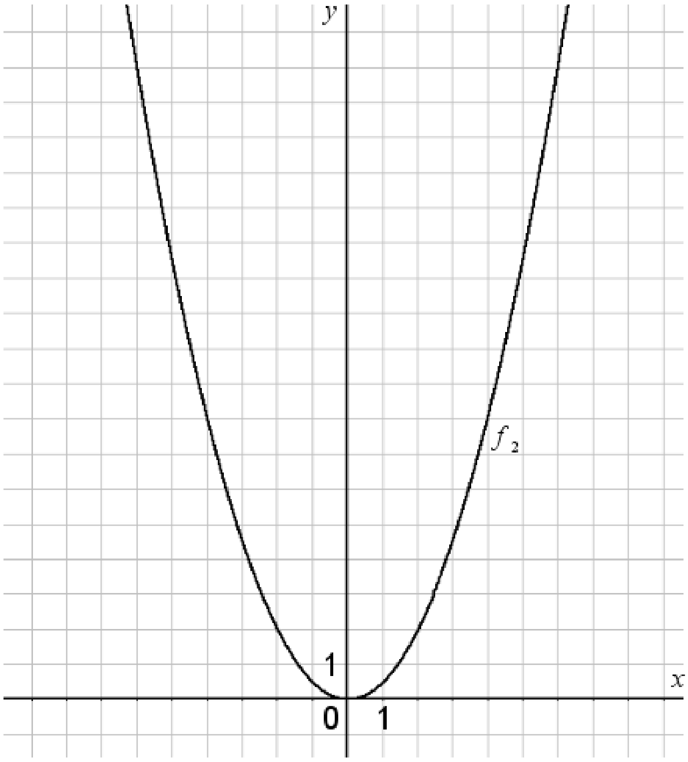
$f_1$: $f_1(-1) = -3$
$f_1(0) = 4$
$f_1(2) = -2$
$f_1(4) = -3$
$f_1(5) = -1$

Patrně nejobvyklejší formou výčtu je pak tabulka.

Př.2 Zapište zadání funkce $f_1$ do připravené tabulky.

| $x$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | | | | | |

II. **Graf**: Jak jsme již uvedli, výhodou grafu je přehlednost a rychlá orientace, nevýhodou může být naopak malá přesnost při odečítání hodnot na osách. Příklad grafického zadání si ukážeme na funkci $f_2$.




III. **Rovnice**: Jde o nejobvyklejší formu zadání funkce, při kterém funkční hodnoty pro různá $x$ dopočítáváme. Výhodou je naprostá přesnost a možnost počítat s neomezeným počtem proměnných. Nevýhodou může být obtížnější práce s některými druhy rovnic. Jedním z našich úkolů v matematice proto bude naučit se bezpečně pracovat s různými druhy funkcí zadanými rovnicí. Příklad takového zadání si můžeme ukázat na funkci $f_3$.

$$f_3 : y = \frac{x^2+1}{x} ; D(f_3) = (-5 ; 0)$$

Pozn.: Často se setkáme s tím, že u zadání funkce rovnicí není uveden definiční obor, který je nutnou součástí zadání. V takovém případě má zadávající na mysli tzv. maximální definiční obor - - tedy množinu všech čísel, která je možné dosadit do pravé strany rovnice.

Dříve než přistoupíme ke zkoumání různých druhů matematických funkcí, seznámíme se blíže s používanou terminologií a symbolikou.

Př.3 a) Určete definiční obor a obor hodnot výše uvedených funkcí $f_1$ a $f_2$.
b) Určete hodnotu funkce $f_1$ v bodě -1, funkce $f_2$ v bodě -6 a funkce $f_3$ v bodě 1.
c) Ve kterém bodě nabývá funkce $f_1$ hodnoty 4, funkce $f_2$ hodnoty 8 a funkce $f_3$ hodnoty 2?

Ne každý předpis, podle kterého řiřazujeme číslům jiná čísla musí být funkcí. V definici je uvedeno, že má – li se jednat o funkci, musí být přiřazeno každému číslu z určité množiny právě jedno číslo. není – li tato podmínka splněna, o funkci se nejedná.

Př.4 Př.4 Rozhodněte, zda následující množiny jsou funkcemi.
a) M 1=$\{[0 ; 2];[-2 ; 0]; [4 ; 0]; [2 ; 2];[-2 ; 3]\}$
b) M 2=$\{[1 ; 1];[2 ; 3];[3 ; 1]; [0 ; 1]; [-2 ; 3]\}$

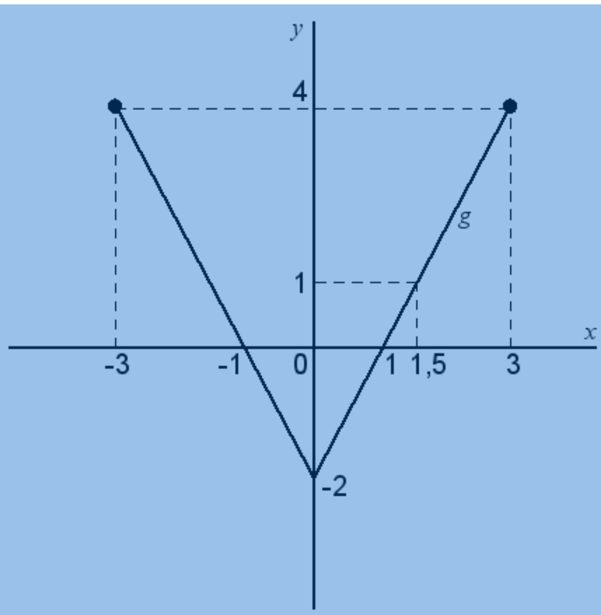
Př.5 Funkce $f$ je dána výčtem: $f=\{[2;3];[3;5];[4;6];[-2;3];[-3;5];[-4;6]\}$ .
a) Jakou hodnotu nabývá funkce v bodě 3?
b) Ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty 6?
c) Určete $D(f)$ a $H(f)$.

Př.6 Funkce $g$ je zadána graficky

a) Určete $g(3); g(0); g(-5)$.

b) Ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty -3; 1; 0?

c) Určete $D(g)$ a $H(g)$.




Př.7 Je dána funkce $h: y=2|x|+1; D(h)=\langle -4; 8)$.

a) Určete funkční hodnoty v bodech 3; -5; $\sqrt{3}-2$.

b) Ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty 5; 19?

c) Odhadněte obor hodnot funkce $h$.

Př.8 Určete maximální definiční obory funkcí $f_1 - f_8$.

a) $f_1: y = \frac{1}{x^2 - 9}$

b) $f_2: y = \sqrt{2 - x}$

c) $f_3: y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

d) $f_4: y = \frac{x^2}{|x| - 2}$

e) $f_5: y = \sqrt{|x - 6|}$

f) $f_6: y = \frac{1}{\sqrt{|x - 6|}}$

g) $f_7: y = \sqrt{1 - |x|}$

h) $f_8: y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

Pozn.: Určování maximálního definičního oboru funkce je vlastně určování podmínky pro $x$ tak, jak jej známe již z učiva o algebraických výrazech. Zohledňujeme přitom dvojí omezení:

a) **Výraz ve jmenovateli zlomku se nesmí rovnat nule.**

b) **Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule.**

Př.10 Je dána funkce $f: y = \dfrac{x^3+1}{x+1};\ D(f) = \langle 0; 3 \rangle$ .

a) Sestrojte její graf.

b) Určete její obor hodnot.

c) Z grafu odhadněte funkční hodnotu v bodě 1,5 a výsledek ověřte početně.